Module Analyse Numérique
Contrôle Terminal - Durée 2h

Exercice 1 *On considère la matrice A définie par:*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Soit le problème

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \text{Trouver } x \in \mathcal{R}^3 \\ \text{tel que} \quad Ax = b \text{ avec } b \in \mathcal{R}^3 \end{cases}$$

On cherche résoudre ce problème par des méthodes itératives.
Sans faire de calcul, dire pourquoi les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes.(Justifier)

Exercice 2 *On considère l'équation suivante:*

$$e^x = x\,(1 + e^x)$$

1. *Montrer que cette équation admet une racine unique x^* dans $[0, 1]$.*
2. *Donner la méthode de Newton associée à la recherche de cette racine x^*.*
3. *On considère le problème (P) suivant:*

$$(P) \quad \varphi(x) = x \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

Vérifier que ce problème a bien une solution unique $l \in [0, 1]$.

Que peut-on dire de la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par: $\begin{cases} x_0 \in [0, 1] \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) \end{cases}$

Exercice 3 *Soit $m > 1$ un entier et F une fonction de classe C^{m+1} sur un intervalle $[a, b]$. On suppose qu'il existe $x^* \in [a, b]$ racine de F d'ordre m.*

1. *Montrer que la méthode de Newton pour approcher x^* est d'ordre 1.*
2. *Montrer que la méthode définie par:*

$$x_{n+1} = x_n - m.\frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

converge vers x^* et que la convergence est au moins d'ordre 2.

Exercice 4 *Soit f une fonction de classe C^3 sur l'intervalle $[-3,3]$ Déterminer le polynôme passant par les points:*

$$(-1,1)\,; \quad (0,1)\,; \quad (1,0)\,;$$

par :

(i) Lagrange

(ii) Newton

(iii) Quelle est l'erreur maximale commise en approchant f par le polynôme d'interpolation ci-dessus. On posera $M = \sup \mid f^{(3)} \mid$ sur $[-3,3]$.

Module Analyse Numérique

Contrôle - Durée 2h

Exercice 1 1. *Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant la factorisation LU de la matrice A définie par:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Avec

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. *Vérifier que la matrice A admet une factorisation de Cholesky et déduire cette factorisation à partir de la factorisation LU.*

3. *Peut-on résoudre le système $Ax = b$ en utilisant les méthodes itératives de Jacobi et de Gauss-Seidel ? Justifiez votre réponse.*

Exercice 2 *On définit la matrice tridiagonale*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer la factorisation LU de la matrice A.*

2. *Vérifier que A admet une factorisation de Cholesky et donner cette factorisation.*

3. *Donner les matrices de Jacobi et de Gauss-Seidel associées à la matrice A et calculer leurs rayons spectraux .*

4. *Établir la relation liant leurs rayons spectraux.*

5. *Les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont-elles convergentes ?*

Exercice 3 *On considère les matrices A_1 et A_2 définies par:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Étudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour A_1.*

2. *Étudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour A_2.*

Module Analyse Numérique

Contrôle - Durée 2h

Exercice 1 *Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant la factorisation LU de la matrice A définie par:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Avec

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 *On définit la matrice tridiagonale*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer la factorisation LU de la matrice A.*
2. *Vérifier que A admet une factorisation de Cholesky et donner cette factorisation.*
3. *Donner les matrices de Jacobi et de Gauss-Seidel associées à la matrice A et calculer leurs rayons spectraux .*
4. *Établir la relation liant leurs rayons spectraux.*
5. *Les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont-elles convergentes ?*

Exercice 3 *Soit A la matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = I - E - F$ où*

$$E = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que A est inversible.*
2. *Soit $0 < \omega < 2$ montrer que la matrice $\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)$ est inversible si et seulement si $\omega \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$. (D désigne la diagonale de A)*
3. *Pour $\omega \in]0, 2[\setminus \{\frac{1}{\sqrt{2}}\}$, on considère la méthode itérative suivante:*

$$\left(\frac{1}{\omega}D - E\right) x^{(k+1)} = \left(F + \frac{1-\omega}{\omega}D\right) x^{(k)} + b$$

où $b \in \mathbb{R}^3$ donné.
On pose

$$B_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1} \left[F + \frac{1-\omega}{\omega}.D\right]$$

(i) Calculer , en fonction de ω , les valeurs propres de B_ω et son rayon spectral.

(ii) Pour quelles valeurs de ω , la méthode itérative proposée converge-t-elle ?